

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

$$\frac{1}{4 + \sqrt{5}} = \frac{1}{4 + \sqrt{5}} \times \frac{4 - \sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}} = \frac{4 - \sqrt{5}}{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4 - \sqrt{5}}{16 - 5} = \frac{4 - \sqrt{5}}{11}$$

ب

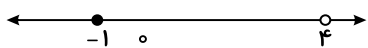
$$\frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{2(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{1 - x}$$

۲

$$5\sqrt[3]{64} - \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{4} - \left(8^{\frac{1}{3}}\right) = 10 - \sqrt[3]{8} = 10 - 2 = 8$$

۳

$$\mathbb{R} - (-1, 4] = (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$$



۴

الف داریم:

$$a_1 = -2, d = 4 - (-2) = 6$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \times 6 = 6n - 8$$

ب

$$a_n = 52 \Rightarrow 6n - 8 = 52 \Rightarrow 6n = 60 \Rightarrow n = 10$$

۵

$$\begin{cases} a_6 = 16 \\ a_9 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 5d = 16 \\ a_1 + 8d = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 3d = -16 \\ a_1 + 8d = 41 \end{cases} \Rightarrow 5d = 25 \Rightarrow d = 5$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{a_1 + 3d = 16} a_1 + 15 = 16 &\Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_7 + a_6 + a_5 + a_4 = (a_1 + 6d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 3d) = \\ 4a_1 + 4d = 4^{(1)} + 14(5) &= 74 \end{aligned}$$

۶

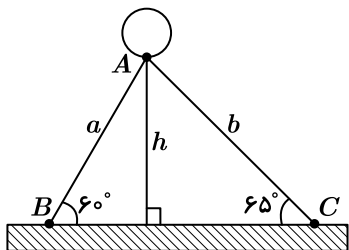
الف نادرست - زیرا توان گویا برای اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

۷

$$a = 8 \quad d = 5 - 8 = -3$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow a_{15} = 8 + (15 - 1)(-3) = 8 - 42 = -34$$

۸



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{36} \rightarrow h = 18\sqrt{3}$$

$$\sin 65^\circ = \frac{h}{b} \rightarrow \frac{9}{10} = \frac{18\sqrt{3}}{b} \rightarrow b = 20\sqrt{3}$$

۹

$$a^r - b^r = (a - b)(a + b)(a^r + b^r)$$

۱۰

$$\frac{x^r + x}{x^r - x - r} = \frac{x(x + 1)}{(x - r)(x + 1)} = \frac{x}{x - r}$$

۱۱ اگر $P(x, y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آنگاه:

$$x^r + y^r = 1, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

$$x = \frac{r\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \left(\frac{r\sqrt{r}}{r}\right)^r + y^r = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{9} + y^r = 1 \Rightarrow y^r = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{y \text{ در ناحیهٔ چهارم منفی است.}} y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{r\sqrt{r}}{r}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{r\sqrt{r}}{r}} = -\frac{1}{r\sqrt{r}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta + r\sqrt{r} \tan \theta = -\frac{1}{3} + r\sqrt{r} \times \frac{-1}{r\sqrt{r}} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

۱۲

$\theta = 15^\circ$ در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیهٔ دوم مثلثاتی، سینوس مثبت و بقیه منفی اند. بنابراین داریم:

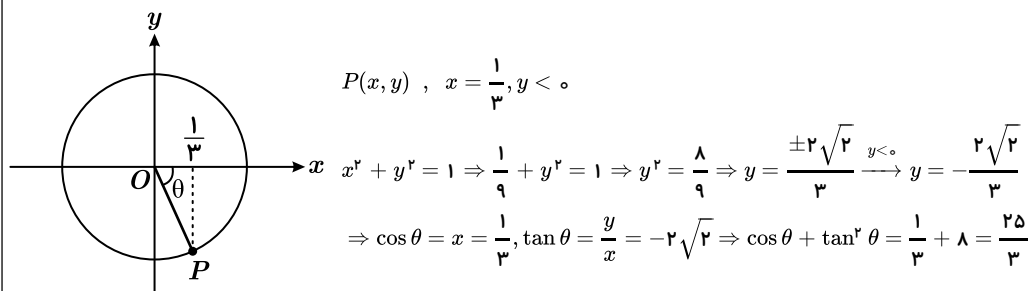
$$1 + \tan^r 15^\circ = \frac{1}{\cos^r 15^\circ} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r = \frac{1}{\cos^r 15^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{\cos^r 15^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos^r 15^\circ = \frac{r}{r+1} \Rightarrow \cos 15^\circ = \pm \frac{\sqrt{r}}{r} \xrightarrow{\cos 15^\circ < 0} = -\frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^r 15^\circ} = \sqrt{1 - \frac{r}{r+1}} = \sqrt{\frac{1}{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{r+1}}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = -\frac{r}{\sqrt{r}} = -\sqrt{r}$$

۱۳



۱۴

$$\frac{r}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r} + 1} = \frac{r}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r} + 1} \times \frac{\sqrt{r} - 1}{\sqrt{r} - 1} = \frac{r}{\sqrt{r+1} - 1} \times (\sqrt{r} - 1) = r(\sqrt{r} - 1)$$

۱۵

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r^r = \lambda \\ a_1 r^r + a_1 r^{\delta} = 6r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^r) = \lambda \\ a_1 r^r(1 + r^r) = 6r \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^r(1 + r^r)}{a_1(1 + r^r)} = \frac{6r}{\lambda}$$

$$r^r = \lambda \Rightarrow r^r = r^r \Rightarrow r = r$$

$$a_1 + a_1 r^r = \lambda \xrightarrow{r=r} a_1 + a_1 \times r^r = \lambda \Rightarrow a_1 + r a_1 = \lambda \Rightarrow \delta a_1 = \lambda \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{\delta}$$

۱۶

$$\triangle ACD : \sin 30^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{y} \Rightarrow y = 2r \Rightarrow AC^2 = CD^2 - AD^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow CA = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ABC : \tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow r + x = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} - r$$

۱۷

$$\mathbb{R} - \{-1, 4\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$$

۱۸

$$x^6 - 2y^6 + 2x^3y^3 = (x^6 + 2x^3y^3 + y^6) - 4y^6 = (x^3 + y^3)^2 - (\sqrt{4}y^3)^2 = (x^3 + y^3 - \sqrt{4}y^3)(x^3 + y^3 + \sqrt{4}y^3)$$

۱۹

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$a_7 \times a_8 = \frac{r}{11} \Rightarrow a_1 r \times a_1 r^7 = \frac{r}{11} \Rightarrow a_1^2 r^8 = \frac{r}{11} \Rightarrow (a_1 r^4)^2 = \frac{r}{11} \Rightarrow a_1 r^4 = \pm \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{11}}$$

چون r^4 مثبت است و جملات دنباله، منفی هستند، پس $a_1 r^4 = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{11}}$ است.

$$a_1 + a_7 = -\frac{11}{11} \Rightarrow a_1 + a_1 r^6 = -\frac{11}{11} \xrightarrow{a_1 r^4 = -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{11}}} a_1 - \frac{r}{9} = -\frac{11}{11} \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{11} + \frac{r}{9}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-11 + r}{11} = -\frac{11}{11} = -\frac{1}{1}$$

۲۰

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 - 6\sqrt{2} + 2} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})(11 + 6\sqrt{2})} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = \sqrt{7}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)}{\underbrace{(\sqrt{3})^2 + 1}_{3+1=4}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2}$$